НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ “INTRODUCTION TO TOPOLOGY” ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ ПРОГРАММЫ НИУ–ВШЭ И НМУ “MATH IN MOSCOW”

1. Организационно-методический раздел

1.1. Цель курса Изучение основ топологии, а именно:

- Понятия топологического пространства, основных примеров и методов задания топологических пространств.
- Основных топологических инвариантов — связности, компактности и им подобных.
- Понятия фундаментальной группы и методов вычисления фундаментальных групп.
- Основных приложений топологии в анализе, геометрии и других разделах математики.

1.2. Задачи курса Обучение методам решения топологических задач. Развитие топологической интуиции и умения видеть топологическое содержание в задачах, происходящих из других разделов математики, а также из приложений. Подготовка слушателей к освоению “топологических” кусков в других курсах, таких как комплексный анализ и дифференциальная геометрия. Создание навыков работы с литературой по топологии и подготовка к самостоятельному изучению оригинальных работ по топологии.

1.3. Методическая новизна курса В России не существует единой традиции преподавания топологии (в отличие, например, от анализа). В Московском университете курс топологии читается совместно с дифференциальной геометрией. В Петербургском — существует отдельно, но больше связан с вопросами так называемой “общей топологии”. Данный курс следует традиции Независимого московского университета — изучается в основном не общая топология (имеющая дело со сложно устроенными “плохими” пространствами, которые встречаются в теории оптимизации и в некоторых других приложениях), а гомотопическая топология и клеточные пространства — такие пространства более наглядны геометрически и имеют многочисленные приложения в алгебраической геометрии, комбинаторике и математической физике. Для данной программы курс Независимого университета существенно переработан с учетом иной подготовки студентов (значительная часть потенциальных слушателей закончили зарубежные вузы на английском языке).

Курс начинается с “мотивационных” примеров — студентам объясняют доказательства некоторых фактов из анализа и геометрии, которые могут быть им знакомы из предыдущего обучения, но их топологическая природа не очевидна. Затем следует раздел “Basics” (т.е. построение курса не совсем линейно), в котором вводятся основные понятия топологии. Затем изучается задача классификации гомотопических объектов — отображений из и в окружность, и вводится понятие фундаментальной группы. На этом месте линейное изложение еще раз прерывается для того, чтобы ввести некоторые понятия, которые относятся не к топологии, а к алгебре (категории и функторы), но без которых изложение невозможно. В завершение курса изучается задача классификации накрытий.

Содержательные примеры из приложений не выделяются в отдельный раздел, а излагаются в тех местах курса, где они нужны для иллюстрации введенной техники.

1.4. Место курса в системе формируемых инновационных квалификаций Топология — раздел геометрии, корни которого лежат в анализе. Многие топологические идеи присутствуют неявно при изложении других разделов математики — комплексного анализа, дифференциальной геометрии и даже комбинаторики. Важно, чтобы студенты, сталкиваясь с такими задачами, осознавали их топологическую природу. Кроме того, топология чрезвычайно способствует накоплению примеров, формируя тем самым геометрическую интуицию, необходимую каждому математику.

2. Содержание курса

2.1. Новизна курса Как уже отмечалось, программа курса основана на традиции преподавания топологии на математическом факультете ВШЭ. По сравнению с упомянутыми курсами особое внимание уделяется понятию категории: с самого начала последовательно проводится идея, что объекты со структурой (топологические пространства, накрытия и др.) имеют смысл только вместе с отображениями, сохраняющими эту структуру (морфизмами). Все теоремы курса (кроме специально оговоренных случаев) сопровождаются строгими доказательствами, что стандартно для российской математической традиции, но не всегда имеет место при преподавании математики в университетах Европы и Америки (и, тем самым, может оказаться неожиданностью для иностранных студентов).

2.2. Тематический план курса

Название темы	количество часов		
	лек.	упр.	сем.
Пример: теорема Брауэра	2	2	2
Топологические и метрические пространства	2	2	2
Связность	2	2	2
Компактность	4	4	4
Отображения из окружности в окружность	4	4	4
Фундаментальная группа	4	4	4
Накрытия	4	4	4
Клеточные пространства	2	2	2
Узлы и зацепления	2	2	2
Итого	26	26	26

2.3. Содержание программы

1) Теорема Брауэра: теорема Брауэра о неподвижной точке в размерности 1 и 2 (последняя — с неполным доказательством). В упражнениях — следствия теоремы Брауэра, в т.ч. основная теорема алгебры.
2) Топологические пространства: Определение топологического пространства, непрерывного отображения, основные примеры (особое внимание $\mathbb{R}$).
3) Связность: Определение связного пространства, связность отрезка, линейная связность. В упражнениях — связное линейно несвязное пространство, канторово множество, канторова лестница.
4) Метрические пространства: Определение метрического пространства и топологии в нем. Примеры неметризуемых пространств, p-адические числа.
5) Компактность: Определение компакта и их поведение при отображениях. Компактность отрезка и другие примеры компактов. Примеры на применение понятия компакта (доказательство неравенств и др.)
6) Отображения из окружности в окружность: Степень отображения из окружности в окружность, окончание доказательства теоремы Брауэра в размерности 2. В упражнениях — эйлерова характеристика (сумма индексов особых точек векторного поля) двумерной сферы и сферы с ручками.
7) Фундаментальная группа: Определение фундаментальной группы и ее поведение при отображениях. Понятие категории и функтора. В упражнениях: вычисление фундаментальной группы различных пространств, топологическая инвариантность понятия края.
8) Накрытия: Определение накрытия, теорема о накрывающей гомотопии, классификация накрытий. В упражнениях: вычисление фундаментальной группы с помощью накрытий.
9) Клеточные пространства: Определение клеточного пространства, примеры клеточных и неклеточных топологий. Вычисление фундаментальной группы по клеточной структуре. В упражнениях: клеточная структура проективных пространств и другие примеры.

10) Узлы и зацепления: Определение узла и зацепления, диаграммы зацепления. Теорема Рейдемейстера (без доказательства). Скобка Кауфмана и полином Джонса. В упражнениях: доказательство нетривиальности некоторых зацеплений.

2.4. Рекомендуемые учебнки

1) O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, V. M. Kharlamov, *Elementary Topology: Problem Textbook*, AMS, 2008.
2) K.Janich, *Topology*, Springer, 1984.
3) V.V.Prasolov, *Intuitive Topology*, AMS, 1995.

На каждом занятии студентам раздаются листки с кратким содержанием текущей лекции.

2.5. Формы контроля Курс рассчитан на 2 модуля. Текущий контроль и, одновременно, важнейшая составляющая курса — самостоятельное решение студентами задач. Каждую неделю студент получает домашнее задание, которое он должен решить дома, а затем обсудить свои записанные решения с преподавателем во время практических занятий. Результаты решения домашних заданий оцениваются в баллах (разное число баллов за разные задачи); сумма баллов затем учитывается при выставлении итоговой оценки.

В конце первого модуля студенты сдают зачет, представляющий собой письменную работу из 5–6 задач, продолжительностью 4 астрономических часа.

В конце второго модуля студенты сдают экзамен, также представляющий собой письменную работу продолжительностью 4 астрономических часа, в ходе которой надо письменно решить 5–6 задач по всему курсу.

Итоговая оценка вычисляется по формуле

$$F = \frac{2}{3}\max(S, E) + \frac{1}{3}\min(S, E),$$

где E — оценка за экзамен (в первом модуле — зачет), а S — оценка за работу в семестре, вычисляемая, в свою очередь, по формуле

$$S = 10 * 1.6 * B/B_{max},$$

где B — сумма баллов, набранных студентом за решение всех задач из домашних заданий (в первом модуле — за первый модуль, во втором модуле — за оба модуля), а B_{max} — наибольная возможная сумма баллов за решение домашних заданий.

Таким образом, для получения максимальной оценки 10 баллов достаточно отлично написать экзамен и решить примерно 60% всех задач из домашних заданий.

2.6. Учебно-методические материалы Образцы домашних заданий и экзаменационных работ приводятся в дополнении к этой программе.